

Algoritmy a grafy 1 (BI-AG1), Cvičení č. 1

Složitost algoritmů, základy grafů

Paralelka 104, Úterý 16:15-17:45

Cvičící: Šimon Lomič
lomicsim@fit.cvut.cz

Informace: [lomicsim.github.io](https://github.com/lomicsim)

Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze
<https://courses.fit.cvut.cz/BI-AG1>



(Verze dokumentu: 25. 11. 2018 11:56)

Obsah cvičení

- Grafy
 - ① Složitost algoritmů, grafy
 - ② Grafy – cesty, souvislost, stromy, kostry, DFS
 - ③ Vzdálenost v (neohod.) grafech, BFS, topologické třídění
- Algoritmy a datové struktury
 - ④ Třídící algoritmy, binární haldy
 - ⑤ Binomiální hlady a amortizovaná složitost
 - ⑥ Binární vyhledávací stromy a AVL stromy
 - ⑦ Pravděpodobnost, hashování
 - ⑧ Rozděl a panuj
 - ⑨ Třídění
 - ⑩ Dynamické programování
- Opět grafy
 - ⑪ Minimální kostry
 - ⑫ Nejkratší cesty v grafu

Hodnocení – Zápočet

- **Semestrální písemka:**

- ▶ V 10. týdnu semestru.
- ▶ Maximum 20, minimum 10.
- ▶ Možnost opravy v posledním týdnu semestru.

- **Kvízy v Marastu:**

- ▶ Každý 2. týden 1 otázka, celkem 6 otázek.
- ▶ Správná odpověď: 1 bod, špatná nebo žádná odpověď: -1 bod.
- ▶ Celkem lze získat nejvýše 6 bodů a nejméně -6 bodů.

- **Programovací úlohy v Progtestu:**

- ▶ Během semestru **tři** programovací úlohy v jazyce C/C++.
- ▶ Celkem 30 bodů.
- ▶ Na každou úlohu 2 týdny, za vyřešení v 1.týdnu 25% bonus.

Hodnocení – Zápočet – Pokračování

- **Aktivita** během cvičení:
 - ▶ Lze získat 0 až 5 bodů.
 - ▶ Body lze získávat za řešení bodovaných úloh ve cvičení a za domácí úlohy.
- Účast v soutěži ACM ICPC:
 - ▶ Za každou vyřešenou úlohu na CTU Open 2 body, ve vyšších kolech 6 bodů.

Celkem je možno získat 56 bodů + bonusy.

Udělení zápočtu je podmíněno splněním 2 podmínek:

- získáním minimálně 10 bodů ze semestrální písemku
- a získáním minimálně 28 bodů celkově.

- Analýza složitosti algoritmů
- Úpravy známých algoritmů
- Úlohy na dynamické programování
- Návrh algoritmu ve formě pseudokódu
- Důkaz korektnosti algoritmu (konečnost a správnost)

1.1 Motivační úloha (1/2 bodu)

Mějme pole $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ n **seřazených** čísel ($a_i \in \mathbb{N}$) a přirozené číslo $K \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda existují indexy i, j , $1 < i, j < n, i \neq j$ takové, že $a_i + a_j = K$.

- Navrhněte efektivní algoritmus, který tento problém řeší, a popište jej pseudokódem.
- Dokažte korektnost Vašeho algoritmu (alespoň hlavní myšlenku).
- Proveďte analýzu časové a paměťové složitosti algoritmu.

1.2 Složitost algoritmů

Analyzujte následující algoritmy na výpis hvězdiček a co nejpřesněji určete kolik hvězdiček program vypíše a kolik kroků program vykoná.

a) for i:=1 to n do
 for j:=1 to n do
 print "*"

b) for i:=1 to n do
 for j:=1 to i do
 print "*"

c) while n > 0 do
 print "*"
 n := n/2

d) while n > 0 do
 for i:= 1 to n do
 print "*"
 n := n/2

e) while n > 0 do
 if (n is odd) then
 print "*"
 n := n/2

f) while n > 0 do
 if (n is odd) then
 for i:= 1 to n do
 print "*"
 n := n/2

Opakování z přednášky – Neorientovaný graf

- **Neorientovaný graf** je uspořádaná dvojice (V, E) , kde
 - ▶ V je neprázdná konečná množina **vrcholů** (nebo také **uzlů**),
 - ▶ E je množina **hran**.
 - ★ Hrana je dvouprvková podmnožina V , $E \subset \binom{V}{2} \subset 2^V$.
- Množinu vrcholů a hran grafu G budeme značit $V(G)$ a $E(G)$.
- **Stupeň** vrcholu v v grafu G , $\deg_G(v)$ značí počet hran grafu G obsahujících vrchol v .
- **k -regulární** graf: $\forall v \in V(G) : \deg(v) = r$.
- **(Otevřené) okolí** $N_G(v)$ – množina všech sousedů.
- **Uzavřené okolí** $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- **Princip sudosti** Pro každý graf $G = (V, E)$ platí

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

1.3 Vlastnosti grafů

- (a) Uveďte příklady použití grafů na reálných objektech.
- (b) Existuje soubor stupňů grafu (multiset čísel velikosti n), který splňuje princip sudosti a přesto graf s tímto souborem neexistuje? A když jsou všechna čísla v multisetu menší jak n ?

0.5b Máme graf $G = (V, E)$ pro který platí $|E| = 2|V| + 5$. V grafu je 10 vrcholů stupně 1 a ostatní jsou stupně 6. Kolik má celkem vrcholů?

Opakování z přednášky – Důležité grafy

- **Úplný graf** $K_n = (V, \binom{V}{2})$, kde $|V| = n$.
- **Úplný bipartitní graf** $K_{n,m}$
 $= (A \cup B, \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B\})$, kde $A \cap B = \emptyset$, $|A| = n$ a $|B| = m$.
- **Cesta** $P_m = (\{0, \dots, m\}, \{\{i, i + 1\} \mid i \in \{0, \dots, m - 1\}\})$.
- **Kružnice** C_n
 $= (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i + 1\} \mid i \in \{1, \dots, n - 1\}\} \cup \{\{1, n\}\})$.
- **Hvězda** $S_n = K_{1,n}$.

Cvičení: Uveďte maximální délku nejdelší cesty v každém z těchto grafů.

1.4 Existence grafu s požadovanými vlastnostmi

Nakreslete graf s požadovanými vlastnostmi nebo uveďte, proč takový graf neexistuje:

- (a) Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.
- (b) 6 vrcholů a všechny jsou stupně 3,
- (c) 6 vrcholy a všechny jsou stupně 1,
- (d) 4 vrcholy se stupni 1, 2, 3, 4,
- (e) 5 vrcholů se stupni 2, 3, 3, 4, 4.
- (f) Pro která n existuje graf na n vrcholech, ve kterém má každý vrchol jiný stupeň?

0.5b Pro která n existuje graf na n vrcholech, ve kterém má každý vrchol jiný stupeň, kromě dvou, které mají stejné?

Opakování z přednášky – Izomorfismus

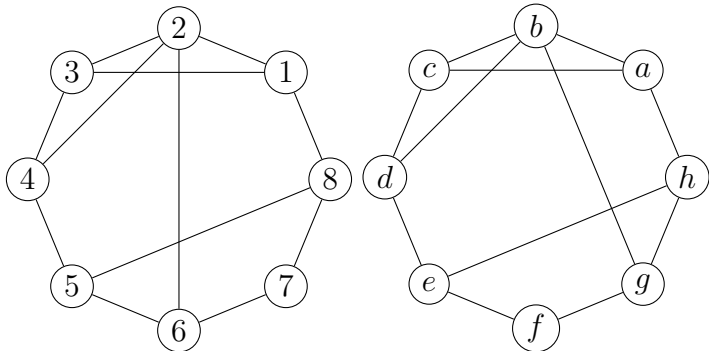
Nechť G a H jsou dva grafy.

- (a) **izomorfismus grafů**: bijekce $f : V(G) \rightarrow V(H)$, kde $\forall u, v \in V(G)$ platí $\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$.
- (b) G a H jsou **izomorfní**, pokud existuje izomorfismus grafů G a H , značíme $G \simeq H$.
- (c) **Automorfismus** grafu G je izomorfismus se sebou samým (izomorfismus $f : V(G) \rightarrow V(G)$).

Cvičení: Mějme vzájemně izomorfní grafy G, H ($G \simeq H$). Víme že G má n automorfismů. Kolik automorfismů má graf H ?

1.5 Izomorfismus

- (a) Jsou každé dva $(n - 1)$ -regulární grafy izomorfní?
- (b) Jsou každé dva $(n - 2)$ -regulární grafy izomorfní?
- (c) Jsou každé dva $(n - 3)$ -regulární grafy izomorfní?
- (d) Rozhodněte, zda jsou následující grafy izomorfní.



1.6 Počet automorfismů určitých grafů

Určete počet automorfismů následujících grafů pro $m, n > 1$:

- (a) úplný graf K_n , z něhož je odstraněna jedna hrana,
- (b) úplný graf K_n , z něhož jsou odstraněny dvě sousední hrany,
- (c) úplný graf K_n , z něhož jsou odstraněny dvě nesousední hrany.
- (d) Najděte příklad grafu, který má právě jeden automorfismus (na alespoň dvou vrcholech).

1.7 Domácí úkol

Definice

Doplněk \overline{G} grafu $G = (V, E)$ je graf $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

- Ukažte, že G je izomorfní H právě tehdy, když \overline{G} je izomorfní \overline{H} . (1/2 bodu)

Úkol odevzdejte na příštím cvičení (případně e-mailem).