Řešení domácího úkolu z 1. cvičení

Definice *Izomorfismus grafů* je bijekce $f : V(G) \to V(H)$, kde $\forall u, v \in V(G)$ platí:

$$\{u, v\} \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

Definice Grafy G a H jsou *izomorfní*, pokud existuje izomorfismus grafů G a H, značíme $G \simeq H$.

Definice *Doplněk* $\overline{G}$ grafu $G = (V, E)$ je graf $(V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Věta Graf G je izomorfní H právě tehdy, když $\overline{G}$ je izomorfní $\overline{H}$.

Pozorování Podívejme se na zobrazení dvojic uzlů $e : \binom{V}{2} \to \binom{H}{2}$ definované izomorfismem f:

$$e(\{u, v\}) = \{f(u), f(v)\},\; \{u, v\} \in \binom{V}{2}.$$

Protože f je izomorfismus, e bijektivně zobrazuje hrany G na hrany H a „nehrany“ G na „nehrany“ H. Doplňek však pouze zamění hrany za „nehrany“ a naopak. Proto f bude určitě i izomorfismus $\overline{G}$ na $\overline{H}$.

Důkaz Grafy G a H jsou izomorfní, proto existuje izomorfizmus z G na H, označme jej $f : V(G) \to V(H)$. Z definice každá dvojice vrcholů $u, v \in V(G)$: splňuje:

$$\{u, v\} \in E(G) \;\Leftrightarrow\; \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$

Protože logický výraz $A \Leftrightarrow B$ je ekvivalentní výrazu $\neg A \Leftrightarrow \neg B$, předchozí tvrzení lze zapsat jako:

$$\{u, v\} \notin E(G) \;\Leftrightarrow\; \{f(u), f(v)\} \notin E(H).$$

To ale je pouze jinak zapsané tvrzení:

$$\{u, v\} \in E(\overline{G}) \;\Leftrightarrow\; \{f(u), f(v)\} \in E(\overline{H}).$$

To je však podmínka izomorfismu, proto f je izomorfizmus $\overline{G}$ na $\overline{H}$ a tyto grafy jsou izomorfní.